donc $\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda+1)Log(1+\frac{1}{\lambda})=1$ et par suite

$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=(\alpha+1)Log(1+\frac{1}{\alpha})-1-\frac{1}{4\alpha}$ En remarquant que

$f(\alpha)=0\Rightarrow \log(1+\frac{1}{\alpha})=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{4\alpha^2}$ on obtient $\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{4\alpha^2}$

B - 1°/ D'après **A** - 2°/ b) on a : $\forall x\geq\alpha$: $f(x)\leq 0$ donc pour tout entier $n\geq 1$(car $\alpha<1$) on a : $f(n)\leq 0 \Rightarrow Log(1+\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*; Log(n+1)-Logn\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}$

$\Rightarrow Log(1+\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}\Rightarrow nLog(1+\frac{1}{n})\leq 1-\frac{1}{4n}$

$\Rightarrow e^{nLog(1+\frac{1}{n})}\leq e^{1-\frac{1}{4n}}$ ce qui donne que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

2°/ On vient de montrer que pour tout entier $n\geq 1$; on a :

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e^{1-\frac{1}{4n}}\Rightarrow\frac{(n+1)^n}{n^n}\leq e^{1-\frac{1}{4n}}\Rightarrow (n+1)^n\leq n^n e^{1-\frac{1}{4n}}$

$\Rightarrow\frac{(n+1)e^{-n-1}(n+1)^n}{(n+1)!}\leq\frac{(n+1)e^{-n-1}}{(n+1)!}n^n e^{1-\frac{1}{4n}}$ d'où

$\frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{(n+1)!}\leq\frac{n^n e^{-n}}{n!}e^{-\frac{1}{4n}}$ ce qui prouve que $U_{n+1}\leq U_n e^{-\frac{1}{4n}}$

* Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $U_{n+1}\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

* Pour $n=1$; d'après l'inégalité précédente

$U_2\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}}=U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}}$ donc l'inégalité est vraie pour $n=1$

* Supposons que pour un entier $n\geq 1$ donné ; $U_{n+1}\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

Montrons que $U_{n+2}\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}$

on a : $U_{n+2}\leq U_{n+1}e^{-\frac{1}{4(n+1)}}$ or $U_{n+1}\leq U_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ donc